重力多体系

牧野淳一郎
東京大学理学系研究科天文学専攻

2003 年 3 月 19 日

1　はじめに

一応、ここでの課題は、12 ページで重力多体系の数値計算の全てを議論しろ、というものだが、こんなのは本 3 冊くらいの分量を書かないと無理と思われる。多少詳しい資料は例えば牧野の講義ノート[1] をみていただくなり、何故か「物性研究」にのった牧野の文章 [Mak01] や Binney and Tremaine[BT87] (まあ、数値計算のことはろくに書いてないが) を見ていただければいいわけなので、ここでは適当なことを思いつくままに書く。

一般に N 体計算に限らず、数値的な研究というのは難しい。紙と鉛筆で仕事をしている理論家な人の中には、「数値計算なんて、基礎方程式を計算機にプログラムすればいいんでしょ」くらいに思っている人が珍しくない。そういう人に指導された学生 (あるいはその本人) がなにもわからないで数値計算のようなことをして無意味な結果を出してしまうこともまたありがちなことである。

数値計算による研究の水準を向上させるためには、そういった「底辺」な研究のレベルアップが、トップレベルの研究をより高度なものにしていくのと少なくとも同程度 には重要であるというのが理屈ではある。まあ、しかし、問題は、大抵のこういった「底辺」な人は、数値計算というものが難しいということをそもそもまるで認識していないために底辺にとどまっているわけであり、自分が認識していないという認識ももちろんないので例えばこういったところになにか書いたとしてもそれが「底辺」な人の目に止まる可能性は事実上ないであろう。つまり、底辺を上げようという努力自体には意味がないとも限らないが、ここで何か書くことは底辺の向上にはつながらない。

つまり、ここになにか書くことには、集録のページふさぎとか予算消化とか書く人の自己満足とかいった程度の意味しかないと考えられる。

そういうわけで、こんな原稿を書いてる暇があればもっと生産的なことをしたほうがいいし、読んでいるあなたも著者がそんなつもりで書いているものは読むのはやめにして次の原稿に進むほうがいいような気がしてきたであろう。ね、してきたでしょ？

[1] http://grape.astron.s.u-tokyo.ac.jp/pub/people/makino/talks/kyoto-kougi.html
http://grape.astron.s.u-tokyo.ac.jp/pub/people/makino/kougi/stellar_dynamics/kougi.html

というわけで、読む人がいなくなったところで本題に入る。

本題は、自己重力多体系の数値計算を、どうすれば「正しく」できるかである。

自己重力多体系の基礎方程式はもちろん、各粒子の運動方程式

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i} Gm_j \frac{\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i}{|\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{x}_i|^3}, \tag{1}$$

である。ここで $\boldsymbol{x}_i$ は粒子 i の位置、 m_j は粒子 j の質量、G は重力定数である。ガスとか磁場とか恒星が進化するとかなんとかかんとかを考えなければ、多体系のシミュレーションとは単にこの方程式をプログラムして数値積分するだけである。

流体シミュレーションや一般相対論的な自己重力系の計算に比べると、古典ニュートン重力に従った自己重力多体系のシミュレーションには著しい特徴がある。それは、シミュレーションプログラムが「正しい」かどうかは極めて精密にチェックできるということである。

さて、ここで、シミュレーションが「正しい」というのはどういう意味かということを明確にしておく必要がある。理論天文学においては、これには少なくとも 3 つのレベルがある。

第一は、物理過程として何を取り込み、何を落としているかということである。

つまり、例えば銀河系を自己重力多体系として扱うなら、星間ガスやそこでの星形成の影響はもちろん入ってこない。解明したい問題に対して、そういう扱いが適当かどうかというのは、当たり前なことではあるが検討されている必要がある。というか、もちろん検討して駄目だとわかるならばそれは駄目なわけで、何かしら別のことを考えないといけないことになるのはいうまでもない。

次に問題になるのは、数値的に扱うことにした系と、実際に計算できる系の違いである。 例えば、銀河系を自己重力多体系として扱うなら、粒子数は 10^{10} 以上である。これだけの粒子を扱うのはまだしばらくは無理なので、シミュレーションではもっと粒子数の少ない系を扱う。また、計算を容易にするために重力ポテンシャルをいじったりもする。これらの影響はどういうものかというのが第二の問題である。

粒子数や重力ポテンシャルを決めてしまえば、解くべき問題はハミルトン力学系の初期値問題であり、相互作用、つまりハミルトニアンは完全に決まっている。数値解法が問題になるのはここからである。つまり、ここまで来ると話は単純な常微分方程式の初期値問題であるわけだが、これを正しく解くということが第三の問題である。

このように、近似の段階をかなり明確に分離して議論できるために、数値計算の信頼性については比較的きちんとした評価が可能である。特に重要なのは、最後の、ハミルトン系になった後、それを常微分方程式系として数値積分する時には、数値計算があっているか間違っているかは非常に確実に評価できることである。

具体的には、特殊な計算法を使わないかぎり、数値誤差は普通はハミルトニアン、つまり全エネルギーや、全角運動量のような保存量の誤差となって現れてくる。従って、保存量の精度に問題があれば、計算が破綻していることは確実である。

もっとも、逆は真ではないことはいうまでもない。つまり、保存量が保存したからといって、数値解があっているとは限らない。しかし、特別に保存量を保存するようにデザインされた数値解法でなければ、保存量が保存していてしかも計算が破綻しているということは極めてありそうにない。

なお、保存量の精度が関係するのは、あくまでもここでいう第三の問題だけであって、第一と第二の問題とはなんの関係もないということは、当たり前のことではあるが必ずしも理解されてはいな

い場合もあるので一応注意しておこう。

もちろん、この 3 個の問題は完全に独立に議論できるわけではない。以下の議論では最初の問題、つまり我々が扱いたい問題は本当に重力多体系なのかという問題には目をつぶって、後の 2 つだけを考える。この時、第二の問題がどの程度深刻であるかは、端的には粒子数で決まる。粒子数無限大の (と思っていい) 系を有限粒子数で近似するなら、粒子数が大きいほど問題が少ないことは間違いないからである。

ところが、計算機の能力は有限なので、粒子数を増やせばそれだけ計算時間がかかる。しかし、計算時間は計算法と要求する計算精度にも依存するので、初期問題として解く時の要求精度を落とすことでより大きな粒子数が扱えるかもしれない。つまり、実際に「もっとも良い」計算結果を得るためには、上の第二の問題と第三の問題の両方を理解し、制御できる必要がある。

このことを言い換えると、第三の、ハミルトニアンが与えられた時にそれをいかにして正確に解くかという問題は、単純に正確に解けばいいというのではなく、必要な精度をいかに少ない計算時間 (場合によってはメモリ使用量) で実現するかという問題、つまりは計算をどうやって速くするかという問題なのである。

というわけで、まず第二の問題はどういうものかということをもう少し詳しくみた後、第三の問題を、計算速度という観点から見て行こう。

2　少ない粒子数での計算

というわけで、問題は、少ない粒子数で計算するとはそもそもどういうことかということだが、 これには実は少なくとも以下の 3 種類がある。第一は、銀河の例のように、実質粒子数無限大の系を有限個の粒子で表すことである。第二は、例えば 100 万体というふうに無限というほど粒子数が大きいわけではない系、例えば球状星団を、10 万とか 1 万といった、実際より少ない粒子数でモデル化することである。最後に、例えば土星リングの一部だけをとり出してきて、周期境界条件を入れて計算するような、系全体を扱うのではなく部分系を切り出して扱う場合がある。

このそれぞれで、どのような問題が起きるかは非常に違う。なお、最初のと 2 番目の違いがわからないかもしれないが、そのことを含めてこれから議論していこう。

2.1　粒子数無限大の系

この例は例えば宇宙論での構造形成の計算や、空間スケールが違うだけともいえるが初期ゆらぎからの銀河形成の計算である。現在の標準的な理解では、宇宙の全質量のほとんどは CDM (冷たい暗黒物質) が担っている。暗黒物質の正体は依然明らかではないわけだが、とりあえず巨大なブラックホールがその辺にゴロゴロしていると考えない限り[2] 、一つの粒子としての質量は小さなものである。つまり、実効的な粒子数は無限大と考えていい。この場合、N 体計算は 6 次元空間の中での分布関数を、離散近似していることになる。

この場合、入ってくる誤差には 2 種類ある。一つは、重力不安定が線型ないし弱い非線型段階で成長している時にはいってくる誤差であり、もうひとつは強い非線型、というよりビリアライズした系で、粒子数が有限であるために入ってくる誤差である。 ちゃんと初期条件を作れば (これはこれ

[2] 巨大なブラックホールが暗黒物質だとすると銀河円盤が現在の厚さよりもっと厚くなっているはずという議論もある。

でいろいろ未解決な問題があるが)、第一の誤差よりも第二の誤差が圧倒的に効くので、以下、第二の誤差について述べる。

ここで、数値計算そのものは完全に正しいとすれば、入ってくる誤差は基本的には 2 体緩和である。従って、2 体緩和がなにか理解できていればいい。簡単に復習しよう。

2.1.1 2 体緩和とはなにか？

まず、2 体緩和とはいったいどういうものかというところから話を始めることにする。原理的には、これがなにかというのは結構厄介な問題である。

有限粒子数の自己重力多体系を考えると、これは以下のような進化をすると考えられる。まず、最初は力学平衡になかったとすると、とりあえず力学平衡に落ちつく。粒子数が無限大であれば、無限に細かく見れば無限に時間がたっても真の力学平衡に到達するわけではないが、まあ、漸近はしていく。この時、各粒子は与えられたポテンシャルの中を運動するだけになり、それ以上進化することはなくなる。

さて、実際には有限粒子数であるので、そもそも真の力学平衡というものはない。有限の質量をもった各粒子が系の中を運動するのに従って、ポテンシャルは必ず変化するからである。この変化によって各粒子の軌道も変化することになる。

それでは、粒子の軌道の変化を、粒子数が有限であることから来る成分とそれ以外に分離することは可能であろうか？系が力学平衡にあるとみなすことができればそれは可能である。つまり、力学平衡にあれば、粒子のエネルギー変化は定義によりすべて粒子数が有限であることによるからである。

が、良く考えると問題なのは、そもそも有限粒子数であるものを力学平衡とみなすとはどういうことかということである。このあたりを考えていると段々混乱してくるので、以下、理想化された状況から順番に考えていくことにしよう。なお、この節の内容は、 L. Spitzer の Dynamical Evolution of Globular Clusters[Spi87] にほぼ沿っている。2 体緩和に関しては、重力多体系での議論とプラズマ物理での議論は全くパラレルなものであり、上記の本の内容自体、同じ著者の Physics of Fully Ionized Gases[Spi56] のものとほとんど同じである。

2.1.2 一様等方な分布

理想化といえば一様等方な分布を仮定することである。例えばマックスウェル分布があって、その中の一つの粒子をとって考えるということをしたいわけだが、これは結構厄介なのでさらに簡単な例を考える。すなわち、速度 0 で空間内に一様 (ランダム) に分布した質点を考え、その中を質量 0 のテスト粒子を飛ばして見る。

もちろん、この場合エネルギー交換はないので速度は変わらず、単に散乱されるだけだが、しかし、この例は 2 体緩和のいくつかの重要な性質を示すのですこし詳しく見ていくことにする。分布している質点の質量を m、数密度を n とする。図 1 のように、テスト粒子が一つの粒子から距離 (インパクトパラメータ) b を速度 v で通った時に曲がる角度 θ は、実際にケプラー問題の解析解を使って

$$\tan\theta = \frac{2b}{(b/b_0)^2 - 1}$$

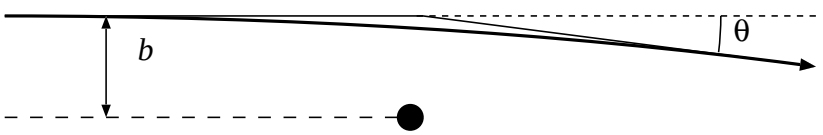

図 1: 2 体散乱

$$b_0 \quad = \quad \frac{Gm}{v^2} \tag{2}$$

で与えられる。単位時間当たり、インパクトパラメータが $(b, b+db)$ の範囲にある散乱の回数は $2\pi nvbdb$ である。

さて、散乱の方向はランダムであると思われるので、平均としては (一次の項は) 0 になる。しかし、 2 次の項は 0 にならない。これは

$$< \Delta\theta^2 >= 2\pi nv \int_0^{b_{max}} \delta\theta^2 bdb \tag{3}$$

で与えられることになる。

この式から既にいろいろな性質がわかる。が、その前に理論的な困難を解決しておく必要があるであろう。すなわち、この積分は $b \to \infty$ で発散しているのである。これについてはいくつかの考え方があった。例えば、初めて 2 体緩和の性質を理論的に調べたチャンドラセカール [Cha43] は、以下のように考えた。

「平均粒子間距離よりもインパクトパラメータが大きいような散乱は、多体の干渉によって効かなくなるのでそこで積分を打ち切ってよい」

しかし、多体の干渉というようなものが実際にあるかどうかはあきらかではない。もっと素直な解釈は、実際に系にあるすべての粒子と常に同時に相互作用しているのだから、システムサイズくらいまで全部いれる (系が構造を持つ場合はちょっとややこしいが、密度の空間依存も積分のなかに入れて全空間で積分する) というものである。

数値実験の結果などから、後者の解釈すなわち全体が効くというほうが正しいということはかなり昔から大体わかっていた。歴史的には、どちらの解釈が正しいかについてはかなり最近まで論争があって、完全に決着がついたといえるのは 94-5 年頃である。が、現在では後者の解釈が正しいということに疑いの余地はない。

式 (3) から、適当に近似すると

$$< \Delta\theta^2 >\sim Gnv^{-3}m^2 \log(R/r_0) \tag{4}$$

となる。ここで R は先に述べたシステムの大きさ、 r_0 は「大きく曲がる」ためのインパクトパラメータの値で、$b_0 = GM/v^2$ の程度である。

さて、これからどんなことがわかるかというわけだが、これから、逆に角度変化が 1 の程度になる時間というのを求めてみると、

$$t_\theta \sim \frac{v^3}{Gnm^2 \log \Lambda} \tag{5}$$

となる。ここで Λ は上の R/r_0 を単に書き換えただけである。

今、$\log \Lambda$ の質量依存性といったものを無視すると、散乱のタイムスケールは速度の 3 乗、数密度の逆数、質量の 2 乗の逆数に比例するということがわかったことになる。特に、質量密度一定の場合というものを考えてみると、タイムスケールが各粒子の質量に比例するということがわかる。

ある大きさを持った多体系というものを考えてみよう。質量 M、ビリアル半径 R、粒子数 N とすれば、ビリアル定理から $< v^2 > /2 = GM/R$、力学的なタイムスケール、つまり典型的な速度を持つ粒子が系を横断するのにかかる時間が $t_d = R/v \sim \sqrt{R^3/GM}$ となる。これを使うと上の緩和のタイムスケールは

$$t_\theta \sim \frac{N}{\log N} t_d \tag{6}$$

となる。つまり、力学的なタイムスケールに比べて、2 体緩和のタイムスケールはほぼ N 倍長いということになる。このために粒子数が大きいほど無衝突系に近付くわけである。

2.1.3 バックグラウンドが速度分布を持つ場合

詳しく式を書くとそれだけでページリミットを超えるので、書くほうは楽でいいがそうもいかないので結果だけを書く。

速度分布を熱平衡、すなわち

$$f_0(\boldsymbol{v}) = \frac{n_f}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(\frac{-v^2/2}{\sigma^2}\right) \tag{7}$$

とすると、単位時間当りの速度変化は

$$< \Delta v_{\text{平行}} > = -4\frac{n_f \Gamma}{\sigma^2}\left(1 + \frac{m}{m_f}\right) G(x) \tag{8}$$

$$< \Delta v^2_{\text{平行}} > = 2\sqrt{2}\frac{n_f \Gamma}{\sigma} G(x)/x \tag{9}$$

$$< \Delta v^2_{\text{垂直}} > = 2\sqrt{2}\frac{n_f \Gamma}{\sigma}\frac{\mathrm{erf}(x) - G(x)}{x} \tag{10}$$

$$< \Delta E > = \sqrt{2}\frac{n_f \Gamma}{\sigma}\left[-\frac{m}{m_f}\mathrm{erf}(x) + \left(1 + \frac{m}{m_f}\right) x\mathrm{erf}'(x)\right] \tag{11}$$

ここで erf は誤差関数であり、

$$G(x) = \frac{\mathrm{erf}(x) - x\mathrm{erf}'(x)}{2x^2} \tag{12}$$

また $x = v_t/(\sqrt{2}\sigma)$ である。

ここで Γ は

$$\Gamma = 4\pi G^2 m_f^2 \ln \Lambda \tag{13}$$

である。ただし、 leading term でない項は適当に落ちてたりするので注意。

まず、速度の 1 次の項を見てみる。 G の振舞いを考えると、v が大きい極限では速度変化は速度の 2 乗に反比例する。これに対して、v が小さい極限では、f を一定と見なすことが出来るので、速度変化は v に比例する。

これは、タイムスケールを考えてみると、速度が大きい極限では減速のタイムスケールが v^3 であるのに対し、逆の極限では 一定になるということである。すなわち、非常に速度が大きい粒子が出来てしまうとこれはなかなか減速しない。もちろん、自己重力系の場合には、そのようなものは系のなかに留まるのは困難である。このような粒子 (超熱的粒子) が問題になるのはプラズマの場合である。

速度が小さいほうではタイムスケールがある一定値、つまりは $v \sim \sigma$ で決まる値あたりになる。

この 1 次の項は、 dynamical friction を表している。これが問題になる場面は、例えば恒星系が質量の違う 2 つの成分から出来ているような場合である。力学平衡状態で、分布関数に質量依存がないようなものを考えると、これは熱平衡から遠く離れている。従って、上の式で決まるタイムスケールで重いものがエネルギーを失い、軽いものがエネルギーを得る。これは、エネルギー等分配に向かう普通の熱力学的な進化である。

が、自己重力系ではこのエネルギー交換の結果熱平衡に近付くとは限らない。つまり、重いものがエネルギーを失い、軽いものがエネルギーを得るということは、それぞれの分布関数が変わり、空間分布も変わるということである。具体的には、重いものは中心に集中した分布になり、軽いものは外側に押し出される。その結果それぞれの成分の速度分散がどうなるかの細かいところは初期条件に依存するが、普通は物が中心に集まれば重力も強くなり、力学平衡では結局速度分散も大きくなる。このために、熱平衡からはかえって遠くなってしまう。

さて、次に、2 次の項を見てみる。速度に平行な成分も垂直な成分も、 v が大きい極限では 0 にいく。特に、 垂直な成分は v に反比例する。これに対し、速度が 0 の極限では、どちらも一定値に収束する。これはテスト粒子が停止している極限でも、回りの粒子によって揺さぶられるということを表しているわけである。

2.1.4 2 体緩和のタイムスケール

前節では、実際にバックグラウンドの粒子も動いている場合について、 2 体緩和によって粒子の速度、エネルギーがどう変化するかの期待値 (のモーメント) を求めた。ここでは、前回の結果を使って、まずいくつかの重要な場合について 2 体緩和がどのように働くかを議論する。

今、フィールドに質量 m_f の粒子が一様に分布しており、テスト粒子として質量 m_t のものがこれもまた一様に分布しているとする。さらに、どちらも速度分布はマックスウェルで与えられるとする。ここでは等分配を考えるので、それぞれの粒子 1 個当たりのエネルギーを E_f, E_t と書く。今、テスト粒子のエネルギー変化の平均を考えると、

$$\frac{d < E_t >}{dt} = 4\pi \int v_t^2 f(v_t) < \Delta E_t > dv_t \tag{14}$$

と書けることになる。これに前節で求めた $< \Delta E >$ を入れて実際に積分を実行することができて、結果は

$$\frac{d < E_t >}{dt} = 2\sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{m_t n_f \Gamma}{m_f} \frac{< E_f > - < E_t >}{(v_t^2 + v_f^2)^{3/2}} \tag{15}$$

となる。

ここで、いくつかの極限的な場合を考えておくことは有益であろう。まず、$m_t >> m_f$ で $v_t \sim v_f$ という状況を考えてみる。これはつまり非常に重いものと軽いものが、同じような空間分布、速度分布で広がっている場合である。この時は上の式で $E_t >> E_f$ なので、

$$\frac{d\log < E_t >}{dt} = -\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{m_t n_f \Gamma}{m_f v^3} \tag{16}$$

となる。なお、この時、変化率はテスト粒子の速度に分母の v_t^2 を通してしか依存しないので、$v_t \to 0$ の極限でエネルギー変化（減速）のタイムスケールは一定値にいき、それは $v_t \sim v_f$ の時の値とそれほど違わない。

次に、$m_t \sim m_f$ で $v_t << v_f$ という状況を考えてみる。この時は上の式を

$$\frac{d(< E_t > /m_t)}{dt} = 2\sqrt{6/\pi}\frac{n_f \Gamma}{m_f}\frac{< E_f >}{2v_f^3} = 8\sqrt{6\pi}G^2 \ln\Lambda n_f m_f < E_f > v_f^{-3} \tag{17}$$

となる。ここで

$$\Gamma = 4\pi G^2 m_f^2 \ln\Lambda \tag{18}$$

を使った。さらに、 $E_t = m_t v_t^2/2$ などを使って書き直せば

$$\frac{d(v_t^2)}{dt} = 4\sqrt{6\pi}G^2 \ln\Lambda n_f m_f^2 v_f^{-1} \tag{19}$$

を得る。つまり、速度が小さい極限では、一定の率でエネルギーをもらうわけである。言いかえれば、温度が 2 倍になるタイムスケールというものは、温度に比例して小さくなるともいえる。

さて、通常「2 体緩和のタイムスケール」という時には何を指しているかというと、この等分配のタイムスケールのことではないのが普通である。が、時と場合によっていろんなものが出てくるが、まあ同じようなものである。普通に使われるのは、

$$t_r = \frac{1}{3}\frac{v_m^2}{< v_{\text{平行}}^2 >_{v=v_m}} = \frac{v_m^3}{1.22n\Gamma} = \frac{0.065 v_m^3}{nm^2G^2\log\Lambda} \tag{20}$$

とするものである。ここで v_m は r.m.s. 速度である。$1/3$ になにか意味があるわけではなく、こう定義したというだけである。

これは、ローカルな量で定義されていて、例えば系全体の緩和時間といったものを考えるのにはちょっと不便なこともある。というわけで、いわゆる half-mass relaxation time t_{rh} というものを導入しておく。これは、半径 r_h の中に質量の $1/2$ があるとして、その中の密度は一様であるとし、さらにビリアル定理から出てくる $T \sim 0.2GM^2/r_h$ といった関係を使って出すことが出来る。ここでビリアル半径ではなく half-mass radius を使ったのは慣習に従っただけで深い意味はない。この 2 つは通常 30% 程度の範囲で一致する。これは

$$t_{rh} = 0.138\frac{N r_h^{3/2}}{M^{1/2}G^{1/2}\log\Lambda} \tag{21}$$

となる。

ここで注意しないといけないことは、 t_{rh} はあくまでも球対称に近い系の half mass radius のあたりでの緩和時間であるに過ぎないということである。従って、球状星団全体の緩和時間とか、あるいは楕円銀河、銀河団といったものには有効な概念であるが、球対称から大きくずれた銀河とか、

あるいは half mass radius のずっと外側やずっと内側では全く違ったものになっていることに注意する必要がある。さらに、速度分布が非等方であるとか、回転がメインであるとかでもまた話が全く変わってくる。このような場合、ローカルな緩和時間、あるいはエネルギー変化自体の式に戻って考えないと、タイムスケールについて全く間違った推定をしてしまうことになる。

2.1.5 実例

2 体緩和が比較的新しい研究でも問題を起こしていた例として、有名な NFW プロファイル [NFW96] がある。彼らは、ダークマターだけの構造形成計算を、様々な宇宙モデルに対して行い、ダークマターハローの構造が宇宙モデルに依存するか、また依存するとすればどのように依存するかを調べた。その結果が良く知られている NFW プロファイルであり、半径の小さい極限で $\rho \propto 1/r$、大きい極限で $\rho \propto 1/r^3$ となり、その間を滑らかにつないだ形をしている。つまり、

$$\rho \propto \frac{1}{r_*(1+r_*)^2} \tag{22}$$

ここで r_* は適当にスケールした半径である。しかも、この形はユニバーサルで、例えば一つの銀河でも銀河団でも同じであるというのが彼らの結果であった。

ここでの問題は、この結果を信じていいかどうかである。彼らの使った粒子数は 10^4 程度であり、中心部での二体緩和時間が宇宙年齢よりはるかに短い。従って、中心部が信用できるかどうかはわからない。というわけで、我々はとにかく粒子数を増やした計算をしてみた [FM97]。これは約 80 万粒子で、GRAPE-4 を使った直接計算であって計算精度も (おそらく必要以上に) 高いものである。

結果は、NFW がいっているような中心で $1/r$ になる分布にはならなず、むしろ $\rho \sim r^{-1.4}$ 程度になった。また、銀河サイズのハローでは、信用できるのは半径 1-2kpc より外側だけであった。

結局、 NFW の結果が “universal” になったのは数値計算の誤差のためであった。すべての計算で粒子数が同じ程度、ソフトニングパラメータも同じ程度だったので、結果がその 2 つで決まっていたのである。

振り返って見るとあまりに明白な誤りではあるが、しかし実際にこういう間違いをした人はいるわけである。

2.2 有限の粒子数の系の場合

ここまで述べてきたことから、実際の系の粒子数が有限であるということの意味は明白であろう。つまり、有限ということは、2 体緩和の効果が現実の系の進化に影響する、あるいは進化を駆動する原動力になっているということである。

このような系の典型は球状星団である。典型的な 2 体緩和のタイムスケールが 10^9 年程度になり、系の進化は基本的には 2 体緩和によって進む。従って、原理的にはタイムスケールを読み変えて、2 体緩和のタイムスケールを合わせてやれば、粒子数が大きい系も小さい系も「同じ」振舞いをするはずである。細かいことをいいだすと、 $\log\Lambda$ の半径依存性が微妙に変わったりもするが、まあ普通は問題ではない。

もしも、2 体緩和だけで話が済むなら、上のスケーリングで話は終わっていて、別に難しく考えることはない。もちろん、話はそれではすまないからこう書くわけである。例えば現実の球状星団の進化であれば、2 体緩和の他に少なくとも以下の 2 つは系の進化を大きく左右する。一つは構成要素

である個々の恒星の進化である。主系列から離れた星は巨星になって質量放出したり、さらには超新星爆発を起こして質量を失ったりする。これにより星団全体の重力エネルギーが小さくなり、星団は 2 体緩和がなくても膨張することになる。もう一つは、親銀河の潮汐場である。大雑把にいって親銀河のポテンシャルと自分のポテンシャルで決まるロシュ半径を超えて外側にいったものは星団から脱出してしまう。星団の質量が減るとロシュ半径も小さくなるので、 ますます星団から星は脱出しやすくなる。

今、恒星進化はちょっと置いて潮汐場の効果と 2 体緩和の関係を考えてみよう。もしも 2 体緩和がなく、潮汐場も時間的に定常である (星団の銀河内の軌道が円軌道である) なら、 一旦力学平衡に達した後は星団から星が逃げることはない。つまり、星団から星が逃げるのは 2 体緩和の効果である。これは Spitzer の教科書にものっているとおりで、理論的におかしいことはない。

しかし、問題は、それでは星団からの星の蒸発率は 2 体緩和時間だけで決まるかどうかである。1990 年頃まではそう考えられていた。この考え方の集大成ともいえるのが、 Chernoff and Weinberg[CW90] によるフォッカープランク方程式によるモデルに近似的に潮汐場の効果を入れ、さらに恒星進化の効果もとりいれたモデルである。 このモデルにより彼らは非常に広い範囲の初期モデルからの球状星団の進化のサーベイを行い、 現在まで生き残る範囲等を求めた。

フォッカープランク方程式を解くのは N 体計算ではなく、分布関数に対する拡散方程式を時間積分するわけだが、ここでの基本的な仮定は緩和時間が力学的なタイムスケールに比べて十分長い、つまり粒子数が十分に大きいということである。他にも速度分散が等方的とか分布が球対称とかいろんな仮定はあるが、とりあえずこれらはそれほど悪さをしない。

力学的なタイムスケールと星団の寿命の関係に初めて着目したのは Fukushige and Heggie[FH95] である。彼らは、 Chernoff and Weinberg のモデルのいくつかについて同様な計算を、しかしフォッカープランク方程式を解くのではなく GRAPE-3 を使った N 体計算で行なった。N 体計算の粒子数は実際の球状星団の粒子数に比べて小さかったので、彼らは力学的なタイムスケールを恒星進化のタイムスケールに合わせた。これでも、星団の寿命が非常に短い場合には正しい結果が得られると考えられる。しかし、彼らの検討したいくつかの場合について、得られた寿命は Chernoff and Weinberg の結果の 10 倍にも及ぶものであった。つまり、力学的なタイムスケールが星団の寿命に大きな影響を持つのである。

この状況をより系統的に調べたのは Portegies Zwart et al.[PHMM98] である。彼らは、広い範囲で粒子数、つまり 2 体緩和の時間スケールと力学的タイムスケールの比を変化させ、星団の寿命がどのように変わるかを調べた。恒星進化のタイムスケールには 2 体緩和を合わせた。この結果、やはり寿命は粒子数に依存し、寿命が宇宙年齢程度の場合でも、現実の球状星団の寿命は粒子数無限大の極限であるフォッカープランク方程式を解いてでてくるものとはかなり違うことがわかったのである。

このようなずれが生じる理由は、単にエネルギー的は系に束縛されなくなった粒子でも、実際に系から離れていくには有限の時間がかかり、その時間は力学的なタイムスケールであるということである。つまり、定性的には極めて当然のことなのであるが、このような効果は最近まで考慮されていなかったのである。

潮汐場と 2 体緩和のカップリングによる進化については、最近になっても Baumgardt [Bau01] による新しい結果がでている。

こういった話になると N 体計算の問題とはいいがたいかもしれないが、しかし、数値シミュレーションと現実の系の違いという意味ではこのような問題は単純な数値計算の問題以上に重要であるといっても間違いではないであろう。

3　数値計算の方法等

というわけで、後 2 ページで数値計算の方法については概説しないといけないが、どう考えても無理なので具体的な計算法については別に書いたもの [Mak01] を見てもらうとして、 ここでは今後の研究の方向について簡単に触れたい。

無衝突系の計算では、前節の議論からもわかるように、時間積分の精度自体はある程度犠牲にしてでも扱える粒子数を増やすことが全体としての精度を上げ、ひいては新しい問題に挑戦するためには重要である。これに対して、衝突系の計算では 2 体緩和自体を正確に表現するためにある程度の計算精度が要求されることになる。

とはいえ、いずれの場合でも、計算速度を速くし、必要とする計算精度を満足したうえで扱える粒子数を増やすことが直接に新しいサイエンスにつながるといっても、決していいすぎということはないと思う。

計算速度を速くする方法には 3 通りある。一つは、より速く計算できるアルゴリズムを開発することである。例えば Barnes-Hut ツリー法、 Aarseth の独立時間刻みといった方法である。これにもまだまだ研究の余地があることは疑う余地はない。第二は、速い計算機を買ってきて使うことである。こう書くと馬鹿みたいだが、 問題は、速い計算機を使うというのがそんなに簡単ではないことである。で、最後は、速い計算機を作ることである。

使う道具が同じならば、もちろんより賢い方法で使うことがもっとも大事である。しかし、特に最近 10 年程度は、「使う道具が同じなら」という前提はかなり怪しい。これは、ここ 20 年ほどの計算機の進化が、少なくとも高速の数値計算に関する限り、計算機を効率良く使うことを次第に困難にする方向にむかってきたからである。 30 年前であれば、もっとも速い計算機というのは IBM か CDC のもっとも高い計算機であり、そこで動くプログラムは、とりあえずは普通のプログラムであった。しかし、現在では、少なくとも価格性能比でもっとも良い計算機はいわゆる PC クラスタ、つまり安いパソコンを普通のネットワークでつないだものであり、 お金に糸目をつけないで最高速を求めるならベクトル計算機が並列になった地球シミュレータである。

これらは、ハードウェアの構造もプログラミングモデルも全く違い、どちらかで速く走るようにチューニングしたプログラムが他方で速く走るということはまずない。むしろ逆に、一方でチューニングした結果、他方での性能はかえって落ちることが普通である。しかも、PC クラスタで満足のいく性能がでるプログラムを書くのは容易ではない、というより PC クラスタで動くプログラムを書くこと自体がすでにかなり敷居の高いことであり、また PC クラスタを導入、運用するのも簡単ではない。

簡単ではないので、大していいことがなければしないで済ませたいわけだが、そうはいかないことが問題である。例えば 2003 年 3 月現在、5 万円程度でピーク性能 5 Gflops 程度のパソコンを買える。100 万で 100Gflops であり、例えば三鷹のスーパーコンピューター VPP5000 の理論ピークの 600 Gflops と同じ桁にはいってしまう。もちろん、アーキテクチャの違いはあって、ピーク性能で比べても意味はないが、格子を切った流体コードならともかく、粒子コードで特に高速な (計算量のオーダーが低い) 計算法、具体的にはツリー法や独立時間刻みといったものは必ずしも VPP 5000 のようなベクトル並列型の計算機で高い実効性能がでるわけではなく、 PC クラスタのほうが高い実効性能がでることも多い。そうすると、スーパーコンピューターを使うよりも部屋における (ちょっと騒音がうるさいかも) PC クラスタを占有して使うほうが良い計算ができるかもしれない。もちろん、粒子法コードで重力だけが対象なら、GRAPE を使えばさらに 1-2 桁実効性能でみた価格性能比は良くなるが、これはちょっと置いておこう。

日本以外でも多少似た状況はあって、割合お金のある研究所では Sun、SGI、あるいは IBM といった伝統的な計算機メーカーの高い並列計算機を買っていて、そこで動くようなプログラムを作らないと研究にならなかったりするが、しかしそういう計算機の速度は 1 台あたりでは 5 万円の PC より遅かったりする。

こういう、形而下の話を云々することは高尚な理論家のすることではないという向きもあるかもしれないが、「計算機は理論の望遠鏡」という時々聞くスローガンをまともに受け取るなら、使いやすいかもしれないけど同じことをするのに 100 倍お金がかかる、言い換えると同じお金で 1/100 のことしかできない計算機を使うことに甘んじていていいものか？という疑問はでてくる。

PC クラスタが他の計算機に比べると (GRAPE は別だが) 価格性能比では圧倒的に優位にたつ時代はしばらくは続きそうな気配なので、近い将来に人より良いシミュレーションができるかどうかは PC クラスタを有効に利用できるかどうかにかかってきている。良いアルゴリズムは、良い道具の上で使えて初めて意味があるのである。

とはいえ、問題は「敷居が高い」ということであろう。これは、天文 (理論) コミュニティとして、啓蒙活動、さらには、より使いやすい並列プログラミングのためのインフラストラクチャの提案・開発といったところまで含めて考えていくべき問題であろう。

あまり「重力多体系の数値計算」の話になっていないが、ページも埋められたのでこの辺で終わることにする。

参考文献

[Mak01] 牧野淳一郎 (2001) 物性研究,76: 374–465.

[Bau01] Baumgardt H. (August 2001) *MN* , 325: 1323–1331.

[BT87] Binney J. and Tremaine S. (1987) *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, Princeton.

[Cha43] Chandrasekhar S. (1943) *Principles of Stellar Dynamics*. Dover, New York.

[CW90] Chernoff D. F. and Weinberg M. D. (1990) *ApJ* , 351: 121–156.

[FH95] Fukushige T. and Heggie D. C. (1995) *MN* , 276: 206–218.

[FM97] Fukushige T. and Makino J. (1997) *ApJL*, 477: L9–12.

[NFW96] Navarro J. F., Frenk C. S., and White S. D. M. (1996) *ApJ* , 462: 563+.

[PHMM98] Portegies Zwart S. F., Hut P., Makino J., and McMillan S. L. W. (1998) *A and A* , 337: 363–371.

[Spi56] Spitzer Lyman J. (1956) *Physics of Fully Ionized Gases*. John Wiley and Sons, Chichester.

[Spi87] Spitzer Lyman J. (1987) *Dynamical Evolution of Globular Clusters*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.