計算機の中に宇宙を作る── 重力多体系とその周辺

牧野淳一郎

東京大学大学院理学系研究科
天文学専攻

講義概要

1. 「理論」天文学の目指すもの
2. 天体現象の特徴
3. 自己重力多体系
   - 太陽系とその安定性
   - 宇宙膨張と銀河形成
   - ・・・

理論天文学の目指すもの

天文学の特徴

- 実験ができない
- 見えるものは (多くの場合) 現在の瞬間だけ
  — 時系列もわからない

その割には目標は無謀

- この宇宙全体
- 銀河・恒星・惑星

が、どのようにして形成され、これからどうなるのか？を明らかにしたい。

どうすればそんなことができるか？

天体現象の特徴

- 「天文学的」に大きい

普通の、地球上で起きることとのもっとも大きな違い:

重力が支配的な力になる。

一つの星：重力と普通の物質の圧力がつりあった状態

一つ一つの星よりも大きなスケールの構造（太陽系、星団、銀河、、、）は基本的に重力だけ。

太陽や恒星の話は柴橋、野本が詳しくする / したはずなので、牧野の話はもっと大きいスケールでの話。

支配方程式:

太陽系、星団、銀河、銀河団、宇宙の大規模構造などの基本方程式

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} -\frac{G m_j r_{ij}}{r_{ij}^3}$$

- それぞれの星 (あるいは惑星) を一つの「粒子」と思った時に、ある粒子は他のすべての粒子からの重力を受ける。
- 大抵の場合に相対論的効果は考えなくていい (速度が光速にくらべてずっと小さい)

計算機「実験」

実際に星や惑星をどこかにおいて実験するのはほとんど不可能

計算機で支配方程式を積分することで実験の代わりにする

＝「計算機実験」

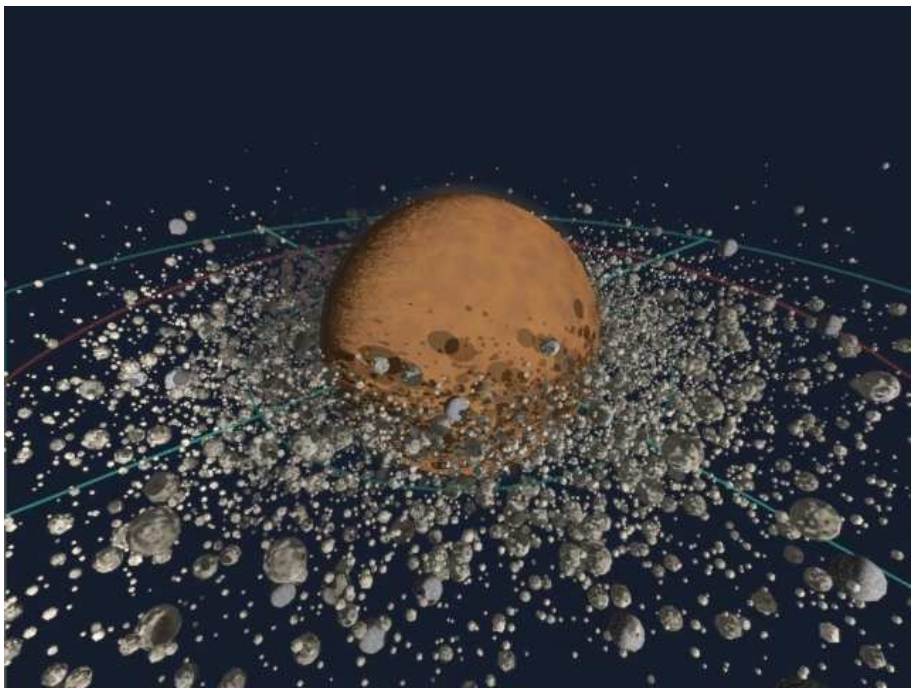
実験そのものとはちょっと違う

- こちらが入れた物理法則以外は入ってこない（はず）
- 計算があっているとは限らない

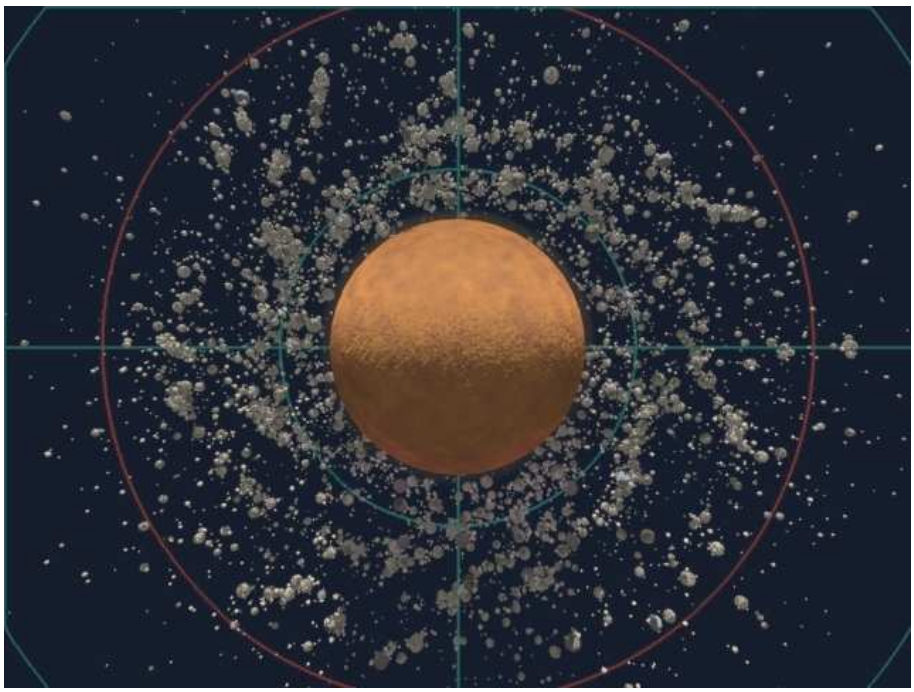
例：月の形成

- 「巨大衝突」仮説：もっとも広く受け入れられている月の形成シナリオ
- 原始地球に、火星大の原始惑星が衝突、飛び散った破辺（またはガス）が集まって月になる
- 集まってくるところを計算

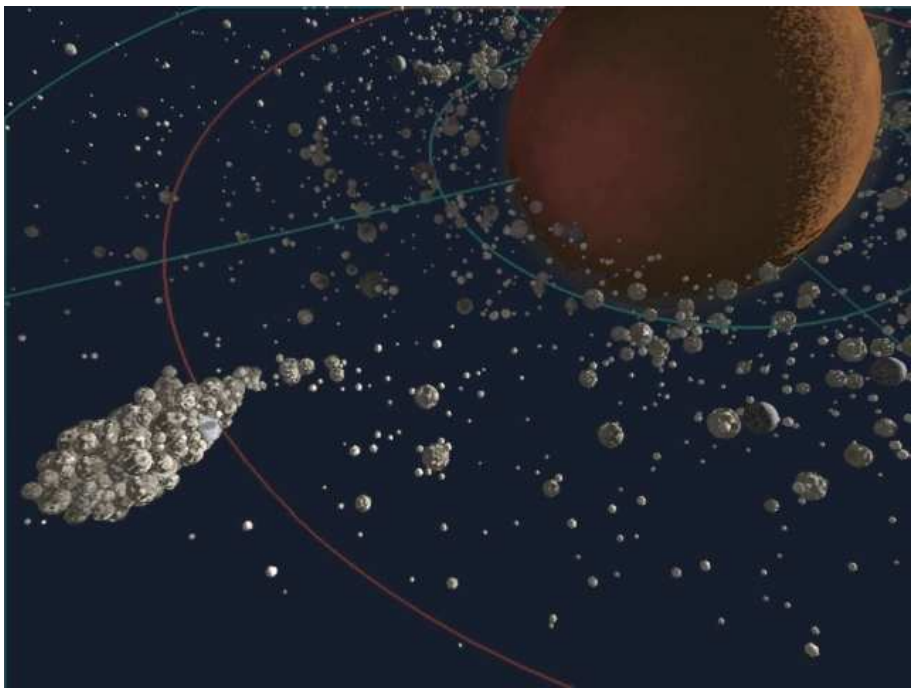
月の形成 – 初期条件



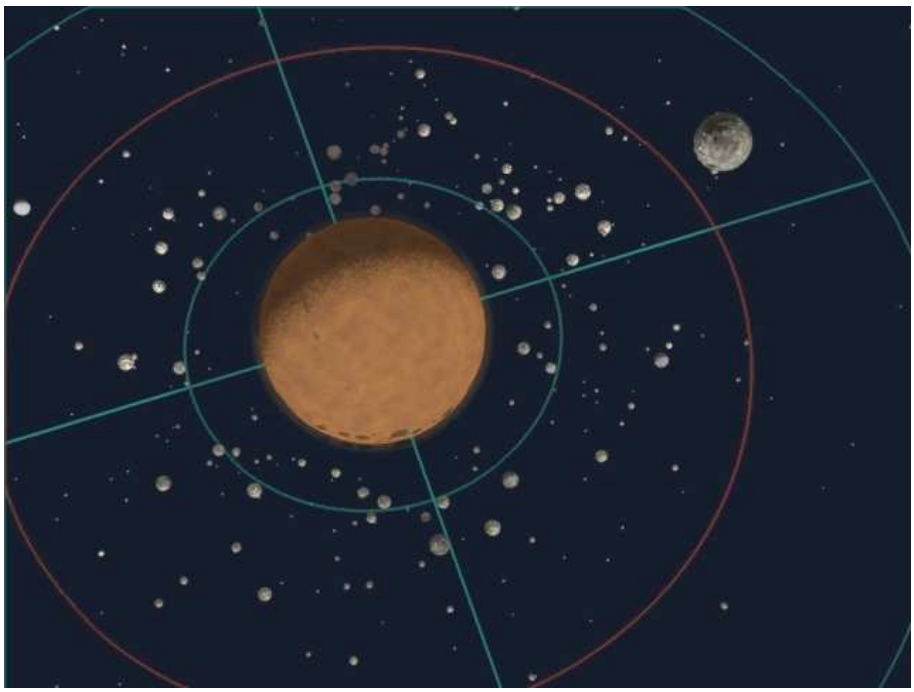
月の形成 – 3周後



月の形成 – 15周後



月の形成 – 50周後



アニメーション

http://yso.mtk.nao.ac.jp/%7Ekokubo/moon/kit/index.html

(国立天文台理論部・小久保さん提供)

重力多体系の基本的性質

惑星や星と、それ以上の大きさの構造の基本的な違い：

圧力が重力とつりあっているわけではない

では、どうして潰れてしまわないか？ — **Newton** 以来の疑問。

- 太陽系
- 銀河
- 宇宙全体

太陽系の場合

太陽の回りを各惑星が回っている。

惑星同士の重力は太陽からのに比べて 3 桁程度小さい (木星の質量は太陽のほぼ 0.1%)。従って

ケプラー問題 + 摂動

とみなせる。で、各惑星はほぼ周期的な運動をする、つまりずっと同じような軌道を回る。

といっても、これは本当にそうか ?(惑星の軌道は本当に安定か？) というのは現在でもまだ完全に解決されたとはいい難い大問題。

古典的な（19世紀くらいの）理解

「ラプラスが太陽系の安定性を証明した」

これは摂動展開したという話。

- ラプラスの頃にはまだ無限級数の収束条件はそもそも知られていなかった
- 摂動展開すればいいというものではないということをポアンカレが示した
- 冥王星、海王星などの新しい惑星がみつかった
- 単純な力学系でも「カオス」になるということがわかってきた

近代的な（20世紀中頃の）理解

20世紀後半には太陽系が本当に安定かどうか？というのは、

「なんだかよくわからない問題」に戻ってしまった。

用語の「整理」

安定これは実はあんまり明確に定義されていない。太陽系だと、要するに惑星がどっかにとんでいってしまうとか、2つがぶつかるとか太陽に落ちるとかそういった大きな変化はないという意味。

可積分 任意の初期条件で解析的な解が求まる。(多重)周期的なので、フーリエ級数で書ける

用語の「整理」(続き)

カオス的 これも定義はかならずしもはっきりしない。可積分なものはカオス的ではないが、一般には可積分かどうかわかるとは限らないし、可積分でなくてもある初期条件の範囲で安定な解が求まるような力学系もある。

ややこしい例

可積分ではないけれど安定な解がある古くて新しい問題：重力3体問題。

3個の質点がお互いの重力に引かれて運動する。

銀河、星団等のもっとも簡単なモデルともいえる。

(2体問題は可積分)

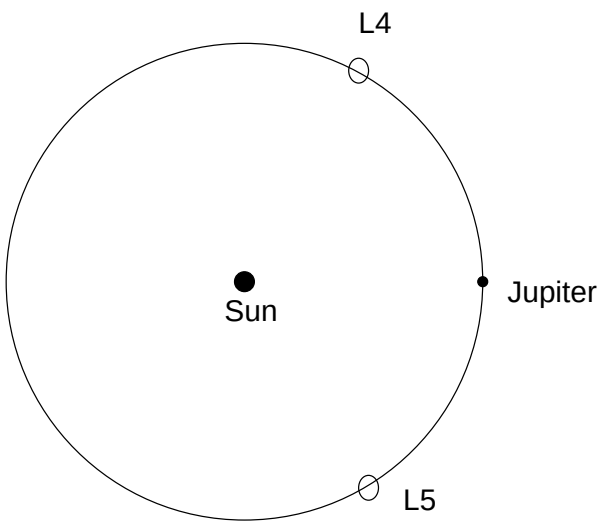
3体問題の性質

一般の3体問題は可積分ではない： ポアンカレによって「証明された」

が、これはどんな初期条件でも安定ではないというわけではない。

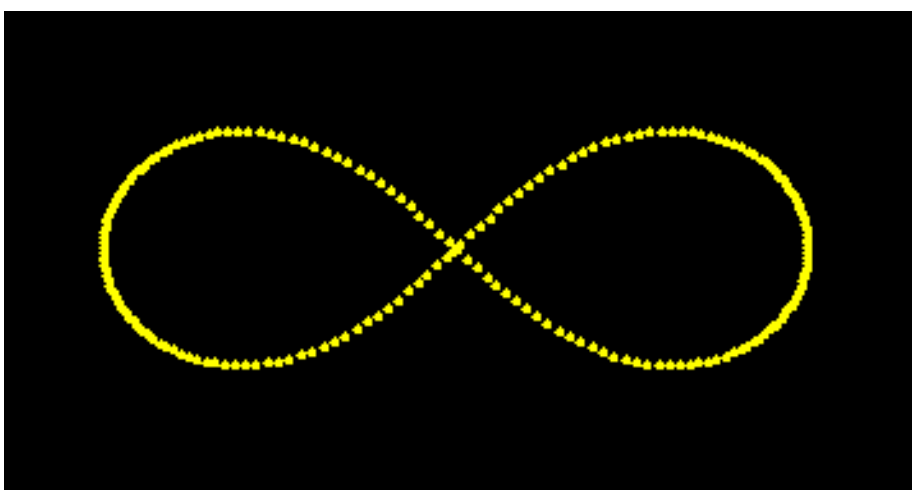
安定な解の例

ラグランジュ解（正3角形解）。
2,3個めの質量が十分小さければ安定。
太陽・木星・トロヤ群の小惑星は実際にこのラグランジュ解を作っている。
（ラグランジュではなくてオイラーによって発見されたとか、、、）



ちょっと余談

数年前に発見された (論文が出たのは今年の始め)
新しい安定軌道 — **Figure-8 Solution**



アニメーション (教養学部情報図形科学教室・船渡さん提供)

Figure-8 solution

- 3個の質量がほぼ等しい (0.005% 程度) の時にだけ安定 (らしい)
- 数値的に (計算機で) 周期軌道を見つける新しい方法が開発されて求まってきたもの。

と、話がずれていきますが、、、

太陽形の安定性について

結局、「計算機で長い間惑星の軌道を追いかけていって、どうなるか見る」のが唯一信用できる方法（信用できないとわかっていない方法）ということになった。

「計算機で軌道を追いかける」とはどういうことか？

計算機による軌道計算

あるハミルトン力学系（古典力学系というのとここでは同じ）の運動方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) \tag{1}$$

と初期条件

$$x(0) = x_0, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v(0) = v_0 \tag{2}$$

が与えられたとして、そのあとの時間発展を計算機で求めること。

具体的な方法

基本的には、最初の位置（と速度）からちょっと後の時刻の位置を求めるというのを繰り返す。

もっとも基本的な方法：オイラー法

1 変数で書くと

$dx/dt = f(x)$ に対して、

$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x(t))$ と近似するもの。

つまり、ある時刻での解のテイラー級数展開の 1 次の項までをとったもの

オイラー法で解は求まるのか？

数学的には、 $\Delta t \to 0$ の極限をとった時に、有限時間たったあとの解 $(T = n\Delta t$ を一定として、$x(t))$ が「真の」解に収束するということが証明されている。

これは、解が可積分とかカオス的とかということとは関係なく決まる。

というわけで、十分な精度で十分に長い時間計算できれば、安定かどうかはわかる、というか、少なくとも不安定ならばそうであるとわかる。

実際上の問題：計算できるか？

例えば太陽系、ここではちょっと簡単化して木星から外側を 100 億年計算したいとする。

木星の軌道周期は 10 年位。従って、10 億周期計算する必要がある。

最終的に求まった木星の位置に少なくとも有効数字があるためには、1 周期積分した後での軌道周期の誤差が 10^{-18} 程度でないといけない。

これは、軌道周期がずれていくと、木星の位置のずれはその 2 乗に比例してつもっていくため。

オイラー法の計算量

周期あたりの誤差が大体周期で Δt を割ったもの
に比例：ということは、 1周期あたり 10^{18} ステッ
プ、あるいは全体では 10^{27} ステップ必要になる。

これにどれくらい時間がかかるか？

今の計算機の速さ

今の普通のパソコン：もっともうまく使って1秒に 2×10^9 回くらい計算（四則演算）ができる。

惑星軌道の計算：惑星間の重力の計算に、 1 ペアあたり 30-40 演算くらいかかる。惑星 5 個ならまあ 500 演算くらい。つまり、1 秒に 10^7 ステップ「しか」計算できない。

ということは、 10^{27} ステップ計算するには、10^{20} 秒かかることになってこれは宇宙の年齢よりも長い。

ではどうするか？

計算を 10^{10} 倍とかそれ以上スピードアップしないとうまくいかないということがわかる。

というわけで、いろいろうまい方法が研究されてきている。

問題は、オイラー法の精度が 1 次でしかないこと、つまり、計算精度が時間刻みに比例してしかよくならないこと。

これは、テイラー展開の 1 次までで打ち切った (2 次から先は誤差になる) ことの当然の結果。

テイラー法

誰でも思いつくような方法：テイラー展開の高次までどんどん計算していって、それを使う。

原理的には簡単でいい

- プログラム（計算式）を書くのが大変
- 計算量（演算数）も次数の指数関数で増える

ということであんまり高次では使えない。

ルンゲ・クッタ法

よく数値計算や「計算物理」というようなタイトルの教科書にでている方法

古典的公式(4次精度)

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + h(k_1/6 + k_2/3 + k_3/3 + k_4/6) \\
k_1 &= f(x_n, t_n) \\
k_2 &= f(x_n + hk_1/2, t_n + h/2) \\
k_3 &= f(x_n + hk_2/2, t_n + h/2) \\
k_4 &= f(x_n + hk_3, t_n + h)
\end{aligned} \tag{3}
$$

8次以上では計算量が増える

多段階法

前のステップでの加速度の値を憶えておく

それと、最新の値を使って、加速度の近似多項式を作る。

その多項式を数値的に積分して次のステップでの近似解を求める

多段階法の実際

・・・・・・というとえらく面倒そうに聞こえるけど、実際にはあらかじめ係数を求めておけば (あるいは教科書とか論文で見つければ)

$$x_{i+1} = x_i + h \sum_{l=0}^{p} b_{pl} f_{i-l} \tag{4}$$

という形に書けるのでまあ大したことはない。(b が係数)

「シンプレクティック」法やその兄弟

1980年頃に始めて提案された

1990年代に大きく改良・進歩があった。

難しいことはちょっと抜きにすると、

「軌道周期がずれていかないような方法」

なので、1周期あたりの誤差が 10^{-18} でなくて
10^{-9} 程度と大きくてもいい。

で、安定性はどうなったかというと

と、こういうような、いろいろな方法が出てきたこと、計算機が速くなったこともあって、

太陽系の惑星の軌道は「安定では」ない

ということが 1987年には示された

ここでの「安定ではない」の意味は：

「非常に近い初期条件の太陽系を 2 個つくってそれぞれ別に計算すると、それぞれでの惑星の位置の差がどんどん大きくなっていく」ということ

不安定のタイムスケール

大きくなるタイムスケール：リアプノフ時間といわれるもの。軌道間の距離がe倍になる時間。

求まったリアプノフ時間： 2千万年

これ自体は 8.5 億年の計算をして求まったもの。

太陽系はでは 45 億年間どうして存在を続けているのか？

さらに長い時間の計算 (主に国立天文台の木下・中井・伊藤らによるもの) でわかったこと :

- リアプノフ時間は確かに 2 千万年 程度と短い
- だからといって惑星がどこかに飛んでいってしまうというようなことはおこらない (らしい)

つまり、軌道の安定性ということからみるとカオス的だが、だからといって全くなんでも起こるというわけではなくてある狭い範囲 (どういう範囲かはよくわからない) に軌道が収まっている (らしい)

結局のところ

そういうわけで安定かどうかはある意味よくわかっていない。

天文学的な太陽系の安定性という観点からは、100億年計算してそこにあればいいというところもある。

より理論的な問題としてはまだ未解決といえる。

以下、太陽系の話はおいて銀河とか星団の話に移る。

なにが問題か？

銀河とか星団とかはそもそもどうしてそこにあるのか？

それらは安定なのか？

どうやってできたのか？

というようなことが問題。

ニュートン（多分）が考えたこと：

太陽と同じような星が宇宙全体に広がっているとすれば、それらはお互いの重力で集まったり落ちてきたりぶつかったりしないか？

本人が考えた解答：

落ちてくるのには1億年くらいかかるから大丈夫
（というか、宇宙の年齢がこれで決まる？）

現代的な解答：

2 つの問題があることになる。

- 宇宙全体としてはなにがおきているのか
- 一つ一つの星、太陽系、銀河とかについてはどうか？

宇宙全体としてはなにがおきているのか？

「宇宙論」の基本的問題。

＝宇宙空間というものはどうやってそこに存在できているか？

一般相対性理論で始めて本当に扱えるようになった問題。

ものが落ちないようにする方法

- 「反重力」でささえる
- 宇宙は広がっているということにする。重力で減速はしている。
- 上の２つの組合わせ

「反重力」なんての超科学かトンデモかと思うかもしれないけど、これはそうでもなくてアインシュタイン自身のアイディア。そういうもの（宇宙項）があるということにすると空間が落ちてこないで済む。

宇宙膨張

宇宙が全体として膨張しているとすればアインシュタイン方程式に宇宙項をつけなくても解がある：ルメートルとかド・ジッターのアイディア。これは 1920 年ころ。

遠くの銀河を観測すると本当に距離に比例した速度で遠ざかっているらしいとわかってきたのが 1930 年頃。

最初は速度ー距離の比例係数の見積りがいまと 10 倍違ったのでいろいろ混乱があった。

宇宙膨張の問題点

当初の問題：

宇宙の年齢が今の $1/10$ になって、放射性元素で決めた地球の年齢よりずっと若くなった。

これを回避するために、「膨張するけれど定常で年齢は無限大」といったモデルも考えられた。

最近は大きな矛盾はなくなってきている（一応）。

宇宙膨張の数学

ニュートン力学で考えても振舞いは同じなので以下簡単に：

宇宙は一様でどこでもものの密度ρが同じであると考える

で、ある半径Rの球を考える。その表面での重力加速度は

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho R^3/R^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho R \qquad (5)$$

ここで、加速度は半径に比例することに注意。

数学（続き）

宇宙全体が一様膨張または収縮するという状況を考えると、ある点（半径）の運動方程式は単に重力がその中にある質量に比例することになるので、ケプラー問題と同じ（だが、一次元）になる。

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{4}{3}\pi GM/r^2 \tag{6}$$

ここで M は時刻が同じなら ρr^3。 違う時刻では、「長さがどう変わったか」というものを $a(t)$ という関数であらわすことにすると

$$\rho(t) = \rho_0/a^3, \quad r = r_0 a \tag{7}$$

数学（続き２）

a の従うべき方程式は結局

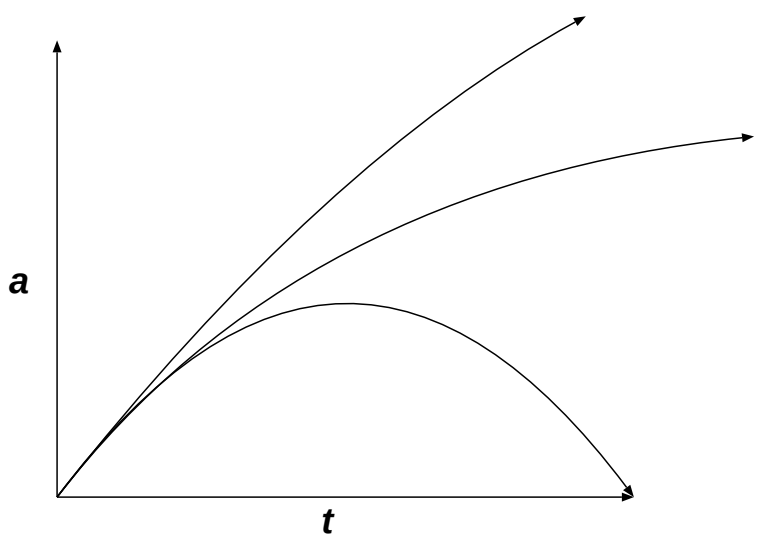
$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{4}{3}\pi\rho_0/a^2 \tag{8}$$

この解は初期条件によって

- 無限に膨張する。無限の時間たっても有限の速度で膨張
- 無限に膨張する。無限の時間たつとちょうど速度が 0
- どこかで収縮を始めてまた一点に戻る

宇宙膨張の3通り

それぞれが2体問題の双曲線解、放物線解、楕円解
に対応



現実の宇宙は？

決定的な証拠があるとはいい難いが、いまのところいろいろな観測結果ともっとも矛盾しないのは、

- 無限に膨張する
- しかも、単純な双曲線解よりも最近膨張が速くなっている

というのが一番「本当らしい」

但し、このへんは10 年もするとまったく話が変わるので、皆さんが大学院に入ったり研究者になったりするころにどうなってるかはわからない。

銀河等はどうやってできたか？

- 宇宙全体は一様に膨張しているとすると、惑星とか、太陽とか、銀河はどうやってできたのか？
- 銀河は重力で星が集まっているだけなのにどうして潰れてしまわないのか？

という問題は依然として残っている。

まず、どうしてそれら、とりあえず銀河とか、ができたのか？ということ。

重力不安定による揺らぎの成長

宇宙全体としては、(非常に大きなスケールでは)
一様で密度一定であるとしても、小さなスケール
になると揺らぎのために一様からずれている。

宇宙が熱い火の玉から現在まで膨張する過程で、
その揺らぎが自分自身の重力のために成長して、
ものが集まってできるのが銀河とか銀河団という
ことになる。つまりは、ニュートンが最初に心配し
た、「星が落ちてくるのではないか」という問題に
対する答は、「おちてきちゃってる」というもの。

では、銀河はどうやって形を保っているか？

宇宙はなにからできているか

そのへんにある普通の物質：バリオン（陽子、中性子）＋電子でできている。

宇宙のバリオンのほとんどは水素原子のまま（ビッグバンの最初にヘリウムやリチウムが少しできて、あとは星のなか、特に超新星爆発の時にもっと重い元素が核反応で作られる）

ダークマター?

見えるバリオンの量 (星と、あとは電波や X 線で
みえる水素ガスの量): 例えば銀河系の質量や、銀
河団の質量のほんの一部でしかない。

銀河：回転曲線

銀河団：X 線ガスの温度から質量を推定

- 重力の理論が間違っている？
- なんだかわからないものがある？

ダークマター

どちらが本当かというのは簡単にはいえないわけだが、今のところ「なんだかわからないものがある」というほうが主流。

これはいろいろな状況証拠があるが、(僕の意見としては)大きいのは重力理論が違うことにした時に、銀河毎に重力理論が違うというわけにはいかない(統一的な説明があるはず)とすると説明が難しいということ。

ダークマターは何か？

大きくわけて 2 つの理論：

- **Hot dark matter** 質量をもったニュートリノが大量にあって、それが宇宙の物質のほとんどを占めている。
- **Cold dard matter** 未知の素粒子があってそれが宇宙の物質のほとんどを占めている。

実はニュートリノではうまくいかないということがわかっている。(ことになっている) この場合銀河団とか大きいものはできていても銀河はまだできていないことになってしまうため。

現在の宇宙に対する我々の基本的な理解

- 宇宙の物質のほとんどは、偉そうにいえば「未知の素粒子」、わかりやすくいえばなんだかわからないものである。
- 宇宙は全体としては一様だが、揺らぎがあって完全に一様なわけではない。宇宙膨張の間にその揺らぎが成長して銀河とか銀河団ができてきた。

こういった理解が正しいかどうか：本当にこういうやり方で現在の宇宙の構造ができるかどうかを計算機シミュレーションで調べることである程度はチェックできる。

銀河団形成のシミュレーション

計算の 1 例 (教養学部宇宙地球科学教室・福重さん提供)

ここでやっていること :

- 基本的には「一様」な宇宙を、なるべく沢山の粒子で表現する
- 理論的に「こう」と思われる揺らぎを与える
- 理論的に「こう」と思われる初期の膨張速度を与える
- あとは各粒子の軌道を数値的に積分していく。基本的には太陽系の時と同じこと

来週の予定

- 「恒星系力学」の基礎：どうして銀河は潰れてしまわないか
- 銀河内星団、特に球状星団の進化
- 惑星形成
- 計算法についての研究等

を紹介したい。